1. En la siguiente suma, determine el valor de x.

$$5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + x = 117$$

Solución

Se puede reescribir la suma como:

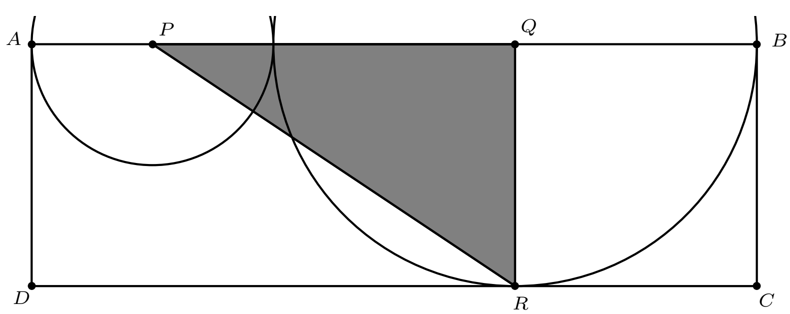
$$\begin{aligned} 5 + (5+2) + (5+2(2)) + (5+2(3)) + \cdots + (5+2n) &= 117 \\ 5(n+1) + 2(1+2+\cdots+n) &= 117 \\ 5(n+1) + 2\frac{n(n+1)}{2} &= 117 \\ 5n + 5 + n^2 + n &= 117 \\ n^2 + 6n - 112 &= 0 \end{aligned}$$

De aquí que $n = -14$ o $n = 8$, sin embargo la respuesta debe ser positiva, así que:

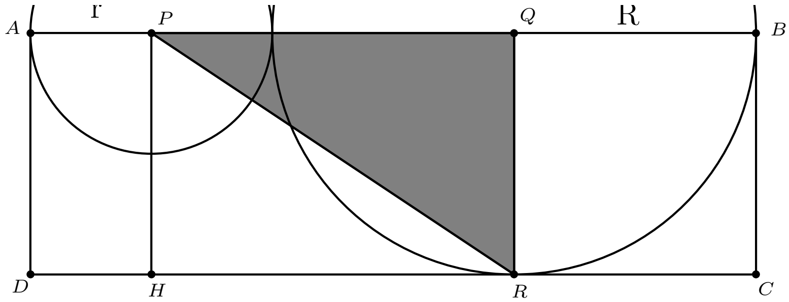
$$x = 5 + 2(8) = 21.$$

Por lo tanto, la respuesta es $x = 21$.

2. Las circunferencias de la figura de centros P y Q y radios diferentes, son tangentes entre si y una de ellas es tangente al rectángulo ABCD en un punto R.¿Cuál es el área del triángulo rectángulo PQR?



Solución



Tomamos un punto H que completa con el triángulo PQR el rectángulo PQRH
Designamos por R y r los radios de las circunferencias mayor y menor, respectivamente.
El área del rectángulo es $\Omega(ABCD) = 2 \cdot R^2 + 2 \cdot Rr = 2 \cdot R(R + r)$
El área del rectángulo PQRH (doble del triángulo PQR)es la mitad del área de ABCD:$R(R+r)$

$$\Omega(PQRH) = R(R + r)$$

Por tanto, el triángulo PQR que tiene área mitad del área del rectángulo anterior es:

$$\Omega(PQR) = \frac{R(R+r)}{2}$$

3. Tres amigos fueron a pescar y ninguno de ellos pescó la misma cantidad. En casa, dijeron:

   Camilo: “Yo pesqué la mayor cantidad, Santiago la menor”.

   Alexander: “Yo pesqué la mayor cantidad, más que Camilo y Santiago juntos”.

   Santiago: “Yo pesqué la mayor cantidad, Alexander sólo la mitad mía”.

   ¿Quién pescó más, si sólo son ciertas 3 afirmaciones de las anteriores? ¿Es posible decir quién pescó la menor cantidad?

   Solución

   Utilizando las tablas de valores de verdad:

	Caso I		Caso II		Caso III	
Camilo	V	V	F	V	F	F
Alexander	F	F	V	V	F	F
Santiago	F	F	F	F	V	V

   Es necesario diferenciar tres casos:

   Caso 1. Supongamos que las dos afirmaciones de Camilo son verdaderas, entonces las afirmaciones de Alexander y Santiago son falsas y esto no es posible pues solo hay dos afirmaciones verdaderas.

   Caso 2. Si las dos afirmaciones de Alexander son las ciertas, entonces la primera de Camilo y las dos de Santiago son falsas y la segunda de Andrés es verdadera y esta es una posible solución.

Caso 3. Suponiendo que las afirmaciones de Santiago son verdaderas, las otras cuatro son falsas y no satisface las condiciones del problema.

Al hacer las suposiciones se comprueba que en el segundo caso es donde existen tres afirmaciones verdaderas y por tanto se concluye que Alexander fue el que pescó más y Santiago la menor cantidad.

4. Si $3^{2012} - 3^{2011} + 3^{2010} = \underbrace{3^{2010} + 3^{2010} + \cdots + 3^{2010}}_{k+2\, sumandos}$ ¿Cuál es el valor de k?

   Solución Note el lector lo siguiente:
   $3^{2012} - 3^{2011} + 3^{2010} = 3^{2010} \times (3^2 - 3 + 1) = 3^{2010} \times 7 = (k+2) \times 3^{2010}$ Simplificando el término 3^{2010} se tiene que $k+2 = 7$, de aquí que la respuesta es $k = 5$

5. El suplemento del complemento del doble de un ángulo; excede en $42°$ a los dos tercios del complemento del ángulo. Calcular el valor de dicho ángulo.

   Solución

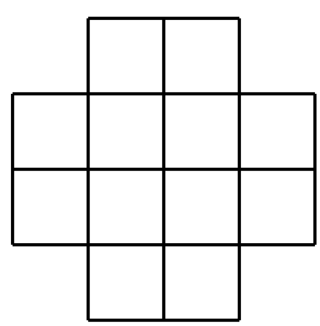
   Sea el ángulo pedido="α".

   Del enunciado se tiene:
   El suplemento del complemento del doble de un ángulo:$180° - [90° - 2\alpha]$
   Dos tercios del complemento del ángulo:$\frac{2}{3}(90° - \alpha)$

   Luego se plantea la siguiente ecuación:

$$\begin{gathered} 180 - [90 - 2\alpha] - 42 = \tfrac{2}{3}(90 - \alpha) \\ 90 + 2\alpha - 42 = \tfrac{2}{3}(90 - \alpha) \\ \tfrac{48+2\alpha}{2} = \tfrac{90-\alpha}{3} \\ 24 + \alpha = \tfrac{90-\alpha}{3} \\ 72 + 3\alpha = 90 - \alpha \\ 4\alpha = 18 \\ \alpha = \tfrac{18}{4} \end{gathered}$$

6. Diga que cantidad de rectángulos hay en la figura dada:



Solución

Se debe tener en cuenta que un rectángulo es un cuadrilátero que tiene sus ángulos rectos y sus lados opuestos paralelos, por ello los cuadrados se deben tomar también como rectángulos al cumplir con la definición. Se determina de una manera sencilla que hay 12 cuadrados pequeños es lo mismo que decir 12 rectángulos pequeños gracias a lo expuesto anteriormente; de cada 4 rectángulos pequeños se forma un nuevo rectángulo y con estas características hay 5 rectángulos (teniendo en cuenta que dos rectángulos son diferentes si tienen al menos un rectángulo pequeño en común), utilizando este mismo procedimiento se determina lo siguiente:

- 12 rectángulos pequeños
- 16 rectángulos con 2 piezas
- 8 rectángulos con 3 piezas
- 9 rectángulos con 4 piezas
- 4 rectángulos con 6 piezas
- 2 rectángulos con 8 piezas

Para un total de 47 rectángulos

7. ¿Cuál es la suma de los divisores primos de $2^{16} \times 3^4 - 2^{16} - 3^4 + 1$?

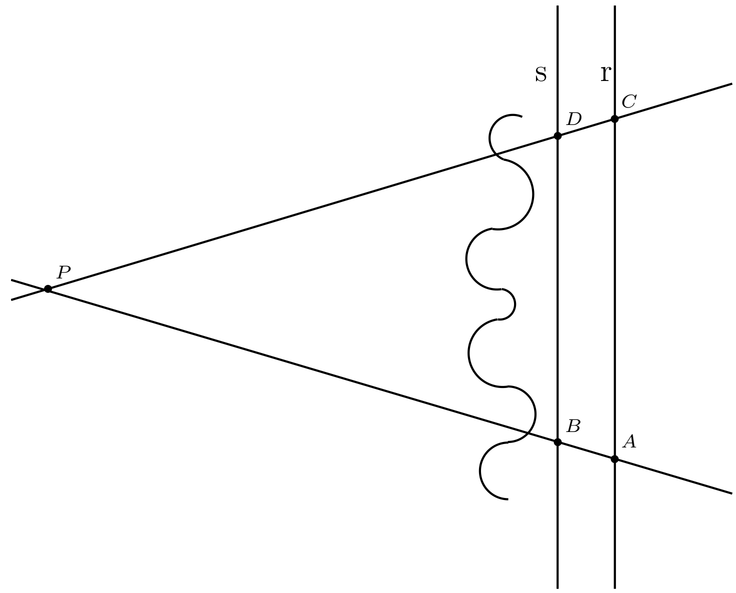
Solución

Note primero que $2^{16} \times 3^4 - 2^{16} - 3^4 + 1$ es igual a $(2^{16} - 1) \times (3^4 - 1)$, en virtud de la propiedad distributiva. Por diferencia de cuadrados y teniendo en cuenta al teorema fundamental de la aritmética se puede obtener los divisores primos de $(2^{16} - 1) \times (3^4 - 1)$, así:

$$\begin{aligned}
(2^{16} - 1)(3^4 - 1) &= (2^8 - 1)(2^8 + 1)(3^2 - 1)(3^2 + 1) \\
&= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1) \\
&= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2)(4)(10) \\
&= 3 \times 5 \times 17 \times 257 \times 2 \times 4 \times 10 \\
&= 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 17 \times 257
\end{aligned}$$

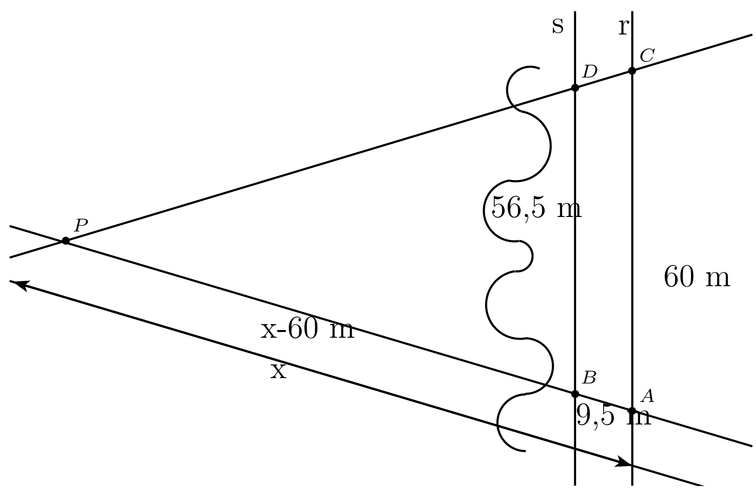
Por lo tanto, la suma de los divisores primos de $2^{16} \times 3^4 - 2^{16} - 3^4 + 1$ es 284.

8. Queremos calcular la distancia que hay desde un punto A de la plata a una piedra P que se ve a lo lejos. Para ello, trazamos una recta r que pase por A y una paralela a ella, s. Desde A observamos P en una línea que corta en B a s. Desde otro punto C de r, hacemos o mismo y obtenemos D. Medimos: $\overline{AB} = 9,5m$, $\overline{AC} = 60m$, $\overline{BD} = 56,5m$. ¿Cuál es la distancia de A a P?



Solución

Interpretando los datos se tiene la siguiente figura:



$\frac{x}{x-9,5} = \frac{60}{56,5} \rightarrow 56,5x = 60(x-9,5) \rightarrow 56,5x = 60x - 570 \rightarrow 3,5x = 570 \rightarrow x \approx 163$

Distancia de A a P es aproximadamente $163m$

9. Hallar el valor de la siguiente suma

$$(-1+2-3+4-\cdots+2010-2011+2012)^2$$

Solución

Note el lector que la suma $-1+2-3+4-\cdots+2010-2011+2012$ se puede ver como $(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-2009+2010)+(-2011+2012)$. Así, $(1)+(1)+\cdots+(1)+(1)$. El número de unos en la anterior suma es 1006. Elevando al cuadrado a 1006 se encuentra el valor de la suma original.